

1^a Prova di verifica di Analisi Matematica I
31 Ottobre 2003
Compito A

Cognome e Nome:

1. Si consideri l'insieme $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore di A ;

b) A ammette massimo e/o minimo?

2. Calcolare il logaritmo complesso di $z = (1 + i)i$.

3. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$|z + 5i|^2 - 3z^2 = 6\operatorname{Re}(z)\bar{z} + z + 2i$$

4. Studiare il carattere delle serie:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left[3^n + \frac{1}{n^3} \right] \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

5. Se una successione $\{a_n\}$ è tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ cosa si può dire sul segno della successione?

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^x - 1)^2}; \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\sin x)^2 \lg x).$$

7. Siano $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = x^\pi$.

a) Si trovino i domini di f e g .

b) Si scrivano esplicitamente le funzioni $f \cdot g$, $f + g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} e si determinino i loro domini.

8. Studiare la continuità di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}$.

9. Se $5x - 8 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 4$, $\forall x \in [0, 5]$, quanto vale $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

10. Enunciare il teorema di esistenza degli zeri mostrando una sua applicazione.

Compito B

Cognome e Nome:

1. Si consideri l'insieme $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n^2 - n}{n + 2}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore di A ;

b) A ammette massimo e/o minimo?

2. Scrivere in forma esponenziale il numero complesso $z = \frac{1}{(1 - i)^2}$.

3. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$6z^3 + 5|z|^2 = 6(\operatorname{Im}(z))^2$$

4. Studiare il carattere delle serie:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{4}{n!} + \left(\frac{1}{5} \right)^n \right] \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}}$$

5. Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente e limitata inferiormente. Cosa si può dire sul limite della successione?

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 2 \sin x}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3}}.$$

7. Siano $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$ e $g(x) = x^e$.

a) Si trovino i domini di f e g .

b) Si scrivano esplicitamente le funzioni $f \cdot g$, $f + g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$, g^{-1} e si determinino i loro domini.

8. Studiare la continuità di $f(x) = \frac{1-3x}{2x+1}$.

9. Cosa si deduce dall'affermazione

$$\forall k > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in]1, +\infty[\text{ con } 1 < x < 1 + \delta, \Rightarrow \lg(x-1) < -k ?$$

10. Dare la definizione di funzione pari, dispari, periodica, biunivoca e monotona, portando qualche esempio.

Compito C

Cognome e Nome:

1. Si consideri l'insieme $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore di A ;

b) A ammette massimo e/o minimo?

2. Calcolare il logaritmo complesso di $z = \frac{i}{1+i}$.

3. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$12z^3 + 6|z|^2 = 7(\operatorname{Im}(z))^2$$

4. Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 7n + 17}}$ converge semplicemente e/o assolutamente.

5. Se $\sum_{n=4}^{+\infty} a_n = 3$ cosa si può dire per la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$?

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(e^x - 1)^2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}.$$

7. Siano $f(x) = \sqrt{x+3}$ e $g(x) = \pi^x$.

a) Si trovino i domini di f e g .

b) Si scrivano esplicitamente le funzioni $f \cdot g$, $f + g$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} e si determinino i loro domini.

8. Studiare la continuità di $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$.

9. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5$. Cosa si può dire sul segno di f ?

10. Dopo aver dato la definizione di funzione monotona, enunciare il teorema sulle funzioni monotone.

Compito D

Cognome e Nome:

1. Si consideri l'insieme $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n+1} - 1, n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore di A ;

b) A ammette massimo e/o minimo?

2. Scrivere in forma esponenziale il numero complesso $z = \frac{2}{(1-i)^2}$.

3. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$4z^2 - |z + 3i|^2 = z - i - 8\operatorname{Re}(z)\bar{z}$$

4. Studiare il carattere delle serie:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + (-1)^n n}{n^2} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2+3n}$$

5. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge è vero che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente? Giustificare la risposta.

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 \sin x}{2x + 1 + \sqrt{x-5}}.$$

7. Siano $f(x) = \frac{1}{|x+3|}$ e $g(x) = x^\pi$.

a) Si trovino i domini di f e g .

b) Si scrivano esplicitamente le funzioni $f \cdot g$, $f + g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$, g^{-1} e si determinino i loro domini.

8. Studiare la continuità di $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

9. Dimostrare che l'equazione $2x = 3^{-x}$ ha una sola soluzione in $]0, 1[$.

10. Dare la definizione di funzione pari, dispari, periodica e biunivoca, portando qualche esempio.