

Soluzioni della prima prova di recupero di Analisi Matematica I 05 Aprile 2004

1. Studiare e tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 2} - |x|.$$

Dominio - La funzione è definita per ogni $x \neq \ln 2$.

Limiti ai bordi del campo - Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 3}{e^x - 2} + x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3}{e^x - 2} - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \frac{e^x - 3}{e^x - 2} - x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^+} \frac{e^x - 3}{e^x - 2} - x = -\infty$$

Asintoti - Dallo studio dei limiti si deduce che la funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = \ln 2$ mentre non ammette asintoti orizzontali.

Ricerca degli asintoti obliqui:

$$m_{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x - 3}{e^x - 2} + x}{x} = 1$$

$$q_{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 3}{e^x - 2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x - 3}{e^x - 2} - x}{x} = -1$$

$$q_{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3}{e^x - 2} = 1$$

Quindi la retta $y = x + \frac{3}{2}$ è asintoto obliquo sinistro, la retta $y = -x + 1$ è asintoto obliquo destro.

Studio della derivata prima - Per ogni $x > 0$ e $x \neq \ln 2$ si ha

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 2) - e^x(e^x - 3)}{(e^x - 2)^2} - 1 = \frac{-e^{2x} + 5e^x - 4}{(e^x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \ln 4,$$

$$f'(x) > 0 \iff 0 < x < \ln 4$$

quindi la funzione è crescente in $]0, \ln 2[$ e in $] \ln 2, \ln 4[$, mentre è decrescente in $] \ln 4, +\infty[$. Il punto $x = \ln 4$ è un punto di massimo relativo.

Per ogni $x < 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 2) - e^x(e^x - 3)}{(e^x - 2)^2} + 1 = \frac{e^x}{(e^x - 2)^2} + 1$$

$$f'(x) > 0 \iff \forall x < 0$$

quindi la funzione è strettamente crescente in $] -\infty, 0[$.

Si osservi inoltre che per $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{2x} + 5e^x - 4}{(e^x - 2)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{(e^x - 2)^2} + 1 = 2$$

pertanto il punto $x = 0$ è un punto angoloso.

Studio della derivata seconda - Per ogni $x > 0$ e $x \neq \ln 2$ si ha

$$f''(x) = \frac{e^x(-9e^x - 2)}{(e^x - 2)^3}$$

$$f''(x) > 0 \iff 0 < x < \ln 2$$

quindi la funzione è convessa in $]0, \ln 2[$ e concava in $] \ln 2, +\infty[$.

Per ogni $x < 0$ si ha

$$f''(x) = \frac{e^x(-e^x - 2)}{(e^x - 2)^3}$$

$$f''(x) > 0 \iff \forall x < 0$$

quindi la funzione è convessa in $] - \infty, 0[$.

2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3 - 1} dx .$$

Si tratta di un integrale improprio, pertanto

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3 - 1} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{x}{x^3 - 1} dx .$$

L'integrale da calcolare è l'integrale di una funzione razionale; decomponendo la frazione in fratti semplici si ha

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B(2x + 1) + C}{x^2 + x + 1} .$$

La risoluzione del sistema dà $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{2}$ quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3 - 1} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{x}{x^3 - 1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \int_t^0 \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{6} \int_t^0 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{2} \int_t^0 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} (\ln |x - 1|)_t^0 - \frac{1}{6} (\ln |x^2 + x + 1|)_t^0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) \right)_t^0 \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{t^2 + t + 1}}{t - 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi . \end{aligned}$$

3. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n^6 - 2n^5 - n^3}} .$$

Si ha

$$\left| \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n^6 - 2n^5 - n^3}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^6 - 2n^5 - n^3}}.$$

Il secondo membro è il termine generale di una serie convergente (basta applicare il confronto asintotico con $\alpha = 3$), quindi la serie data è assolutamente convergente e dunque convergente.

4. Determinare tutti i numeri complessi z che risolvono l'equazione

$$\left(\frac{z}{1+iz} \right)^3 = -i.$$

Suggerimento: Porre $w = \frac{z}{1+iz}$ e risolvere prima l'equazione nella variabile w .

Posto $w = \frac{z}{1+iz}$ le soluzioni nella variabile w saranno le tre radici cubiche di $-i$. Per calcolarle, scriviamo $-i$ in forma trigonometrica. Si ha $\rho = 1$ e $\theta = -\frac{\pi}{2}$ quindi le tre radici cubiche di $-i$ sono date dalla formula

$$w_k = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

con $k = 0, 1, 2$, e cioè

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad w_1 = i, \quad w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Dall'uguaglianza $w = \frac{z}{1+iz}$ si deduce $z = \frac{w}{1-iw}$. Quindi si ottengono per z i tre valori

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{w_0}{1-iw_0} = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \\ z_1 &= \frac{w_1}{1-iw_1} = \frac{i}{2} \\ z_2 &= \frac{w_2}{1-iw_2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}. \end{aligned}$$