

# Soluzioni della prima prova di verifica di Analisi Matematica I

## Compito A

1. Si consideri l'insieme  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- a) Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore di  $A$ ;
- b)  $A$  ammette massimo e/o minimo?

### Risposta

a) Per ogni  $x \in A$  si ha  $x \leq \frac{3}{2}$ .

Infatti, se  $n$  è pari,  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , quindi

$$(-1)^{2m} + \frac{1}{2m} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2m} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m - 1 \geq 0 ,$$

vera per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

Se  $n$  è dispari,  $n = 2m - 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , quindi

$$(-1)^{2m-1} + \frac{1}{2m-1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{2m-1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 10m \geq 7 ,$$

vera per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

Pertanto  $A$  è limitato superiormente,  $\frac{3}{2}$  è il più piccolo dei maggioranti quindi

$$\sup A = \frac{3}{2}.$$

Per ogni  $x \in A$  si ha che  $x > -1$ .

Infatti, se  $n$  è pari,  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , quindi

$$(-1)^{2m} + \frac{1}{2m} > -1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2m} > -1 ,$$

vera per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

Se  $n$  è dispari, si ha  $n = 2m - 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , quindi

$$(-1)^{2m-1} + \frac{1}{2m-1} > -1 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{2m-1} > -1 \Leftrightarrow 2m - 1 > 0 ,$$

vera per ogni  $m \in N$ .

Dunque  $A$  è limitato inferiormente,  $-1$  è il più grande dei minoranti quindi  $\inf A = -1$ .

b) Poichè  $\frac{3}{2} \in A$ ,  $A$  ammette massimo e  $\max A = \frac{3}{2}$ . Invece  $A$  non ammette minimo in quanto  $-1 \notin A$ .

2. Calcolare il logaritmo complesso di  $z = (1+i)i$ .

**Risposta**

$z = (1+i)i = -1+i$ . Allora,  $\rho = \sqrt{2}$  e  $\theta = \frac{3}{4}\pi$ , quindi

$$\log_C z = \lg \rho + i(\theta + 2k\pi) = \lg \sqrt{2} + i \left( \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \right) .$$

3. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$|z + 5i|^2 - 3z^2 = 6\operatorname{Re}(z)\bar{z} + z + 2i$$

**Risposta**

Posto  $z = x + iy$  l'equazione diventa

$$x^2 + (y+5)^2 - 3(x^2 + 2xyi - y^2) = 6x(x - iy) + x + iy + 2i$$

da cui

$$-8x^2 + 4y^2 + 10y - x + 25 - i(y+2) = 0 .$$

Da qui il sistema

$$\begin{cases} -8x^2 + 4y^2 + 10y - x + 25 &= 0 \\ y + 2 &= 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni  $\left(\frac{-1-\sqrt{673}}{16}, -2\right)$ ,  $\left(\frac{-1+\sqrt{673}}{16}, -2\right)$ . Le soluzioni dell'equazione data sono pertanto

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{673}}{16} - 2i, \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{673}}{16} - 2i.$$

4. Studiare il carattere delle serie:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ 3^n + \frac{1}{n^3} \right] \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

### Risposta

a) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$  è il primo della resto della serie geometrica di ragione

$x = 3 > 1$ , pertanto essa è divergente positivamente. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$  è la serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha = 3 > 1$ , quindi convergente. Dunque tali serie sono regolari. Allora la serie data è anch'essa regolare. Inoltre, poichè vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ 3^n + \frac{1}{n^3} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

la serie data è divergente<sup>1</sup>.

b) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$  è a termini positivi. Possiamo dunque applicare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)!} \frac{2^n n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

Pertanto la serie diverge.

---

<sup>1</sup>Si poteva anche osservare che, trattandosi di serie a termini positivi, dato che il termine generale della serie non tende a zero ( $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + \frac{1}{n^3}) = +\infty$ ), la serie è divergente.

5. Se una successione  $\{a_n\}$  è tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$  cosa si può dire sul segno della successione?

**Risposta**

Per il teorema della permanenza del segno, definitivamente i termini della successione saranno positivi, ossia

$$\exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \Rightarrow a_n > 0 .$$

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^x - 1)^2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\sin x)^2 \lg x).$$

**Risposta**

a) Utilizzando i limiti notevoli si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} = 1 .$$

b) Basta osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\sin x)^2 \lg x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 - (\sin x)^2 \frac{\lg x}{x} \right] = +\infty .$$

7. Siano  $f(x) = \sqrt{x+2}$  e  $g(x) = x^\pi$ .

a) Si trovino i domini di  $f$  e  $g$ .

b) Si scrivano esplicitamente le funzioni  $f \cdot g$ ,  $f + g$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f^{-1}$  e si determinino i loro domini.

### Risposta

a) Si ha:  $\text{dom } f = [-2, +\infty[$  e  $\text{dom } g = [0, +\infty[$ .

b)  $f \cdot g = f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{x+2})x^\pi$  quindi  $\text{dom}(f \cdot g) = [0, +\infty[$ .

$f + g = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + x^\pi$  quindi  $\text{dom}(f + g) = [0, +\infty[$ .

$\frac{f}{g} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{x^\pi}$  quindi  $\text{dom} \frac{f}{g} = ]0, +\infty[$ .

$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{g(x)+2} = \sqrt{x^\pi+2}$  quindi  $\text{dom}(f \circ g) = [0, +\infty[$ .

$g \circ f = g(f(x)) = (f(x))^\pi = (\sqrt{x+2})^\pi$  quindi  $\text{dom}(g \circ f) = [-2, +\infty[$ .

Essendo  $f$  strettamente monotona in  $[-2, +\infty[$ ,  $f$  è invertibile in tale intervallo e si ha  $f^{-1}(y) = y^2 - 2$  per  $y \geq 0$ , quindi  $\text{dom } f^{-1} = [0, +\infty[$ .

8. Studiare la continuità di  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}$ .

### Risposta

Il dominio della funzione  $f$  è l'insieme  $\mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . In tale insieme la  $f$  è continua in quanto rapporto tra funzioni continue. Il punto  $x = 1$ , che appartiene al derivato del dominio ma non al dominio della  $f$ , è un punto di discontinuità di seconda specie essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{|1-x|}} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}.$$

9. Se  $5x - 8 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 4$ ,  $\forall x \in [0, 5]$ , quanto vale  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ?

### Risposta

Poichè  $\lim_{x \rightarrow 3} (5x - 8) = 7$  e  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 4) = 7$ , per il teorema del confronto  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$ .

**10.** Enunciare il teorema di esistenza degli zeri mostrando una sua applicazione.

**Risposta**

Si vedano gli appunti del corso.

## Compito B

1. Si consideri l'insieme  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n^2 - n}{n + 2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

a) Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore di  $A$ ;

b)  $A$  ammette massimo e/o minimo?

### Risposta

a) Per ogni  $k > 0 \exists x \in A : x > k$ .

Infatti, fissato ad esempio  $k = 4$ , esiste  $x = \frac{14}{3} \in A$  (per  $n = 7$ ) tale che  $x > 4$ .

Pertanto  $A$ , non avendo maggioranti, non è limitato superiormente e si ha  $\sup A = +\infty$ .

Per ogni  $x \in A$  si ha che  $x \geq 0$ , in quanto tutti i valori di  $A$  sono non negativi.

Dunque  $A$  è limitato inferiormente, 0 è il più grande dei minoranti quindi  $\inf A = 0$ .

b) Ovviamente  $A$  non ammette massimo. Invece  $A$  ammette minimo in quanto  $0 \in A$ , quindi  $\min A = 0$ .

2. Scrivere in forma esponenziale il numero complesso  $z = \frac{1}{(1 - i)^2}$ .

### Risposta

$z = \frac{1}{(1 - i)^2} = \frac{i}{2}$ . Allora,  $\rho = \frac{1}{2}$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , quindi

$$z = \rho e^{i(\theta + 2k\pi)} = \frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} .$$

**3.** Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$6z^3 + 5|z|^2 = 6(\operatorname{Im}(z))^2$$

**Risposta**

Posto  $z = x + iy$  l'equazione diventa

$$6(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3) + 5(x^2 + y^2) = 6y^2$$

da cui

$$6x^3 - 18xy^2 + 5x^2 - y^2 + i(18x^2y - 6y^3) = 0.$$

Da qui il sistema

$$\begin{cases} 6x^3 - 18xy^2 + 5x^2 - y^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni  $(0, 0)$ ,  $(-\frac{5}{6}, 0)$ ,  $(\frac{1}{24}, -\frac{\sqrt{3}}{24})$ ,  $(\frac{1}{24}, \frac{\sqrt{3}}{24})$ . Le soluzioni dell'equazione data sono pertanto

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -\frac{5}{6}, \quad z_3 = \frac{1}{24} - \frac{\sqrt{3}}{24}i, \quad z_4 = \frac{1}{24} + \frac{\sqrt{3}}{24}i.$$

**4.** Studiare il carattere delle serie:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{4}{n!} + \left( \frac{1}{5} \right)^n \right] \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}}$$

**Risposta**

a) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  è il primo della resto della serie esponenziale pertanto è convergente. Allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n!}$  è anch'essa convergente con somma  $4(e - 1)$ .

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{5} \right)^n$  è il primo resto della serie geometrica di ragione  $x = \frac{1}{5} < 1$ ,



quindi convergente, con somma  $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 = \frac{1}{4}$ . Dunque, essendo tali serie regolari (convergenti), la serie data è anch'essa regolare (convergente). Inoltre, poichè vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{4}{n!} + \left( \frac{1}{5} \right)^n \right] = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{5} \right)^n = 4(e-1) + \frac{1}{4} = 4e - \frac{15}{4}$$

la serie data è convergente, con somma  $4e - \frac{15}{4}$ .

b) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}}$  è a termini positivi. Possiamo dunque applicare il criterio del confronto asintotico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left( \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}} \right) \stackrel{\alpha=\frac{3}{2}}{=} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1 .$$

Pertanto la serie converge.

**5.** Sia  $\{a_n\}$  una successione decrescente e limitata inferiormente. Cosa si può dire sul limite della successione?

### Risposta

Poichè la successione è monotona (decrescente), per il teorema sul limite delle successioni monotone, la successione  $\{a_n\}$  è regolare e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} .$$

Inoltre, essendo  $\{a_n\}$  limitata inferiormente, tale limite è finito, ossia la successione è convergente.

**6.** Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 2 \sin x}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3}} .$$

### Risposta

a) Utilizzando i limiti notevoli si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(1+x)}{x} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \sqrt{2}.$$

b) Basta osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 2 \sin x}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + 1 + \frac{3}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

7. Siano  $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$  e  $g(x) = x^e$ .

a) Si trovino i domini di  $f$  e  $g$ .

b) Si scrivano esplicitamente le funzioni  $f \cdot g$ ,  $f + g$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $g^{-1}$  e si determinino i loro domini.

### Risposta

a) Si ha:  $\text{dom} f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$  e  $\text{dom} g = [0, +\infty[$ .

b)  $f \cdot g = f(x) \cdot g(x) = \frac{x^e}{|x+1|}$  quindi  $\text{dom}(f \cdot g) = [0, +\infty[$ .

$f + g = f(x) + g(x) = \frac{1}{|x+1|} + x^e$  quindi  $\text{dom}(f + g) = [0, +\infty[$ .

$\frac{f}{g} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{|x+1|x^e}$  quindi  $\text{dom} \frac{f}{g} = ]0, +\infty[$ .

$f \circ g = f(g(x)) = \frac{1}{|g(x)+1|} = \frac{1}{|x^e+1|}$  quindi  $\text{dom}(f \circ g) = [0, +\infty[$ .

$g \circ f = g(f(x)) = (f(x))^e = \left(\frac{1}{|x+1|}\right)^e$  quindi  $\text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ .

Essendo  $g$  strettamente monotona in  $[0, +\infty[$ ,  $g$  è invertibile in tale intervallo e si ha  $g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{e}}$  e  $\text{dom} g^{-1} = [0, +\infty[$ .

8. Studiare la continuità di  $f(x) = \frac{1-3x}{2x+1}$ .

**Risposta**

Il dominio della funzione  $f$  è l'insieme  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} = ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}, +\infty[$ . In tale insieme la  $f$  è continua in quanto rapporto tra funzioni continue. Il punto  $x = -\frac{1}{2}$ , che appartiene al derivato del dominio ma non al dominio della  $f$ , è un punto di discontinuità di seconda specie essendo

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{1-3x}{2x+1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{1-3x}{2x+1} = +\infty .$$

9. Cosa si deduce dall'affermazione

$$\forall k > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in ]1, +\infty[ \text{ con } 1 < x < 1 + \delta, \Rightarrow \lg(x-1) < -k ?$$

**Risposta**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \lg(x-1) = -\infty .$$

10. Dare la definizione di funzione pari, dispari, periodica, biunivoca e monotona, portando qualche esempio.

**Risposta**

Si vedano gli appunti del corso.

### Compito C

1. Si consideri l'insieme  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \left( 1 - \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$ .

a) Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore di  $A$ ;

b)  $A$  ammette massimo e/o minimo?

### Risposta

a) Per ogni  $x \in A$  si ha  $x < 1$ .

Infatti, se  $n$  è pari,  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , quindi

$$(-1)^{2m} \left( 1 - \frac{1}{2m} \right) < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2m} < 1 \Leftrightarrow 2m > 0 ,$$

vera per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

Se  $n$  è dispari,  $n = 2m - 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , quindi

$$(-1)^{2m-1} \left( 1 - \frac{1}{2m-1} \right) < 1 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{2m-1} < 1 \Leftrightarrow 4m > 3 ,$$

vera per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

Pertanto  $A$  è limitato superiormente, 1 è il più piccolo dei maggioranti quindi  $\sup A = 1$ .

Per ogni  $x \in A$  si ha che  $x > -1$ .

Infatti, se  $n$  è pari,  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , quindi

$$(-1)^{2m} \left( 1 - \frac{1}{2m} \right) > -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2m} > -1; \Leftrightarrow 4m > 1,$$

vera per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

Se  $n$  è dispari, si ha  $n = 2m - 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , quindi

$$(-1)^{2m-1} + \frac{1}{2m-1} > -1 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{2m-1} > -1 \Leftrightarrow 2m - 1 > 0 ,$$

vera per ogni  $m \in \mathbb{N}$ .

Dunque  $A$  è limitato inferiormente,  $-1$  è il più grande dei minoranti quindi

$\inf A = -1$ .

b) L'insieme  $A$  non ammette nè massimo nè minimo in quanto  $-1 \notin A$  e  $1 \notin A$ .

2. Calcolare il logaritmo complesso di  $z = \frac{i}{1+i}$ .

**Risposta**

$z = \frac{i}{1+i} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ . Allora,  $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , quindi

$$\log_C z = \lg \rho + i(\theta + 2k\pi) = \lg \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) .$$

3. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$12z^3 + 6|z|^2 = 7(\operatorname{Im}(z))^2$$

**Risposta**

Posto  $z = x + iy$  l'equazione diventa

$$12x^3 + 36x^2yi - 36xy^2 - 12iy^3 + 6x^2 + 6y^2 = 7y^2$$

da cui

$$12x^3 - 36xy^2 + 6x^2 - y^2 + i(36x^2y - 12y^3) = 0 .$$

Da qui il sistema

$$\begin{cases} 12x^3 - 36xy^2 + 6x^2 - y^2 &= 0 \\ 3x^2y - y^3 &= 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni  $(0,0)$ ,  $(-\frac{1}{2},0)$ ,  $(\frac{1}{32}, -\frac{\sqrt{3}}{32})$ ,  $(\frac{1}{32}, \frac{\sqrt{3}}{32})$ . Le soluzioni dell'equazione data sono pertanto

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -\frac{1}{2}, \quad z_3 = \frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i, \quad z_4 = \frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}i .$$

4. Dire se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 7n + 17}}$  converge semplicemente e/o assolutamente.

### Risposta

La serie data è una serie a termini di segno alterno, con  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 7n + 17}}$ . Ora, è immediato verificare che  $a_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  e che  $a_n \geq a_{n+1} \forall n \geq 4$ . Pertanto, per il criterio di Leibniz la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n =$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 7n + 17}}$  è convergente.

Per vedere se tale serie è anche assolutamente convergente, studiamo la serie dei suoi valori assoluti,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 7n + 17}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 7n + 17}}$ . Applichiamo il criterio del confronto asintotico

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{1}{\sqrt{n^2 - 7n + 17}} \stackrel{\alpha=1}{=} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 7n + 17}} = 1.$$

Pertanto la serie dei valori assoluti diverge.

5. Se  $\sum_{n=4}^{+\infty} a_n = 3$  cosa si può dire per la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ?

### Risposta

La serie  $\sum_{n=4}^{+\infty} a_n$  è convergente e poichè una serie ed ogni suo resto hanno

lo stesso carattere, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è convergente.

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(e^x - 1)^2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}.$$

### Risposta

a) Utilizzando i limiti notevoli si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1 - \cos x}{x^2} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

b) Basta osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x^2}}{1 + \frac{\cos x}{x^2}} = 1.$$

7. Siano  $f(x) = \sqrt{x+3}$  e  $g(x) = \pi^x$ .

a) Si trovino i domini di  $f$  e  $g$ .

b) Si scrivano esplicitamente le funzioni  $f \cdot g$ ,  $f + g$ ,  $\frac{g}{f}$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f^{-1}$  e si determinino i loro domini.

### Risposta

a) Si ha:  $\text{dom} f = [-3, +\infty[$  e  $\text{dom} g = \mathbb{R}$ .

b)  $f \cdot g = f(x) \cdot g(x) = \pi^x \sqrt{x+3}$  quindi  $\text{dom}(f \cdot g) = [-3, +\infty[$ .  
 $f + g = f(x) + g(x) = \sqrt{x+3} + \pi^x$  quindi  $\text{dom}(f + g) = [-3, +\infty[$ .  
 $\frac{g}{f} = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\pi^x}{\sqrt{x+3}}$  quindi  $\text{dom} \frac{g}{f} = ]-3, +\infty[$ .

$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{g(x)+3} = \sqrt{\pi^x+3}$  quindi  $\text{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ .

$g \circ f = g(f(x)) = \pi^{f(x)} = \pi^{\sqrt{x+3}}$  quindi  $\text{dom}(g \circ f) = [-3, +\infty[$ .

Essendo  $f$  strettamente monotona in  $[-3, +\infty[$ ,  $f$  è invertibile in tale intervallo e si ha  $f^{-1}(y) = y^2 - 3$  per  $y \geq 0$ , quindi  $\text{dom} f^{-1} = [0, +\infty[$ .

8. Studiare la continuità di  $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ .

**Risposta**

Il dominio della funzione  $f$  è l'insieme  $\mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . In tale insieme la  $f$  è continua in quanto costante (per  $x \in ]-\infty, 1[$   $f(x) = -1$ , per  $x \in ]1, +\infty[$   $f(x) = 1$ ). Il punto  $x = 1$ , che appartiene al derivato del dominio ma non al dominio della  $f$ , è un punto di discontinuità di prima specie essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = +1 .$$

Il salto della funzione è  $s = 2$ .

9. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5$ . Cosa si può dire sul segno di  $f$ ?

**Risposta**

Per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno del punto 1,  $I(1, \delta)$ , tale che  $\forall x \in I(1, \delta)$  con  $x \neq 1$ ,  $f(x) < 0$ .

10. Dopo aver dato la definizione di funzione monotona, enunciare il teorema sulle funzioni monotone

**Risposta**

Si vedano gli appunti del corso.



## Compito D

1. Si consideri l'insieme  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n+1} - 1, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

a) Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore di  $A$ ;

b)  $A$  ammette massimo e/o minimo?

### Risposta

a) Per ogni  $x \in A$  si ha  $x \leq -\frac{1}{2}$ .

Infatti,

$$\frac{1}{n+1} - 1 \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n+1 \geq 2,$$

vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Pertanto  $A$  è limitato superiormente,  $-\frac{1}{2}$  è il più piccolo dei maggioranti

quindi  $\sup A = -\frac{1}{2}$ .

Per ogni  $x \in A$  si ha che  $x > -1$ .

Infatti,

$$\frac{1}{n+1} - 1 > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} > 0,$$

vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Dunque  $A$  è limitato inferiormente,  $-1$  è il più grande dei minoranti quindi  $\inf A = -1$ .

b) Poichè  $-\frac{1}{2} \in A$ ,  $A$  ammette massimo e  $\max A = -\frac{1}{2}$ . Invece  $A$  non ammette minimo in quanto  $-1 \notin A$ .

2. Scrivere in forma esponenziale il numero complesso  $z = \frac{2}{(1-i)^2}$ .

### Risposta

$z = \frac{2i}{(1-i)^2} = i$ . Allora,  $\rho = 1$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , quindi

$$z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}.$$

3. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$4z^2 - |z + 3i|^2 = z - i - 8\operatorname{Re}(z)\bar{z}$$

**Risposta**

Posto  $z = x + iy$  l'equazione diventa

$$4x^2 + 8xyi - 4y^2 - x^2 - (y + 3)^2 = x + iy - i - 8x(x - iy)$$

da cui

$$11x^2 - 5y^2 - 6y - x - 9 + i(-y + 1) = 0 .$$

Da qui il sistema

$$\begin{cases} 11x^2 - 5y^2 - 6y - x - 9 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni  $\left(\frac{1-\sqrt{881}}{22}, 1\right), \left(\frac{1+\sqrt{881}}{22}, 1\right)$ . Le soluzioni dell'equazione data sono pertanto

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{881}}{22} + i, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{881}}{22} + i .$$

4. Studiare il carattere delle serie:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + (-1)^n n}{n^2} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2+3n}$$

**Risposta**

a) La serie data si può scrivere come  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{2}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right]$ .

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  è la serie armonica generale che è convergente, quindi anche la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$  è convergente. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  è una serie a termine di segno

alternò che verifica le ipotesi del criterio di Leibniz, quindi è convergente. Dunque tali serie sono regolari (convergenti). Allora la serie data è anch'essa regolare. Inoltre, poichè vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + (-1)^n n}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

la serie data è convergente.

b) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2+3n}$  è a termini positivi. Possiamo dunque applicare il criterio del radice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{-n^2+3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n+3} = 0 < 1.$$

Pertanto la serie converge.

5. Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  converge è vero che  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge assolutamente? Giustificare la risposta.

**Risposta**

No, infatti se  $a_n = \frac{1}{n}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  converge per il criterio di Leibniz ma la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 \sin x}{2x + 1 + \sqrt{x-5}}.$$

**Risposta**

a) Razionalizzando numeratore e denominatore si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1-1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{(x+1-1)(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

b) Basta osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 \sin x}{2x + 1 + \sqrt{x} - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x} - 5}{x}} = \frac{1}{2}.$$

7. Siano  $f(x) = \frac{1}{|x+3|}$  e  $g(x) = x^\pi$ .

a) Si trovino i domini di  $f$  e  $g$ .

b) Si scrivano esplicitamente le funzioni  $f \cdot g$ ,  $f + g$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $g^{-1}$  e si determinino i loro domini.

### Risposta

a) Si ha:  $\text{dom} f = \mathbb{R} - \{-3\} = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, +\infty[$  e  $\text{dom} g = [0, +\infty[$ .

b)  $f \cdot g = f(x) \cdot g(x) = \frac{x^\pi}{|x+3|}$  quindi  $\text{dom}(f \cdot g) = [0, +\infty[$ .

$f + g = f(x) + g(x) = \frac{1}{|x+3|} + x^\pi$  quindi  $\text{dom}(f + g) = [0, +\infty[$ .

$\frac{f}{g} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{|x+3|x^\pi}$  quindi  $\text{dom} \frac{f}{g} = ]0, +\infty[$ .

$f \circ g = f(g(x)) = \frac{1}{|g(x)+3|} = \frac{1}{|x^\pi+3|}$  quindi  $\text{dom}(f \circ g) = [0, +\infty[$ .

$$g \circ f = g(f(x)) = (f(x))^\pi = \left( \frac{1}{|x+3|} \right)^\pi \text{ quindi } \text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-3\}.$$

Essendo  $g$  strettamente monotona in  $[0, +\infty[$ ,  $g$  è invertibile in tale intervallo e si ha  $g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\pi}}$  e  $\text{dom} g^{-1} = [0, +\infty[$ .

8. Studiare la continuità di  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

### Risposta

Il dominio della funzione  $f$  è l'insieme  $\mathbb{R} - \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ . In tale insieme la  $f$  è continua in quanto rapporto tra funzioni continue. Il punto  $x = 0$ , che appartiene al derivato del dominio ma non al dominio della  $f$ , è un punto di discontinuità di terza specie in quanto

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$

9. Dimostrare che l'equazione  $2x = 3^{-x}$  ha una soluzione nell'intervallo  $]0, 1[$ .

### Risposta

Considerata la funzione  $f(x) = 2x - 3^{-x}$  in  $[0, 1]$ , essa è continua in  $[0, 1]$  e  $f(0) = -1 < 0$   $f(1) = \frac{5}{3} > 0$ . Per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un punto in  $]0, 1[$  in cui la funzione si annulla, ossia, in tale intervallo, esiste almeno una soluzione dell'equazione data. Osservando poi che la funzione  $f(x)$  è strettamente crescente, tale soluzione è unica.

10. Dare la definizione di funzione pari, dispari, periodica e biunivoca, portando qualche esempio.

### Risposta

Si vedano gli appunti del corso.