

2^a Prova di verifica di Analisi Matematica I
12 Gennaio 2004

Cognome e Nome:

1. Sia $f(x) = \left| \frac{1 + \lg x}{x} \right|$. Determinare i massimi e minimi relativi e/o assoluti, l'insieme immagine di f , e calcolare l'area della regione di piano determinata dalla f in $[\frac{1}{3}, 1]$.
2. Dopo aver enunciato il teorema di derivazione delle funzioni composte, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^{\arctan x}$ nel punto di coordinate $(1, f(1))$.
3. Sia $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-3}$. Dire se la funzione è invertibile e, in caso affermativo, calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_o = 3$.
4. Sia f definita su $[0, 1]$, continua e derivabile in $]0, 1[$, e tale che $f(0) = f(1)$. Allora:
 - a) esiste un punto $c \in]0, 1[$ tale che $f'(c) = 0$;
 - b) ad f si può applicare il teorema di Lagrange in $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$;
 - c) f è continua in $[0, 1]$;
 - d) ad f si può applicare il teorema di Rolle in $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.
5. Con quale metodo si può risolvere l'integrale $\int \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$?
6. Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}.$$
7. Dire se la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty[$.
8. Si spieghi brevemente cosa è l'integrale definito di una funzione in un intervallo, che cosa è l'integrale indefinito e quali relazioni ci sono tra i due concetti.
9. [Facoltativo] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione pari e derivabile. Provare che f' è dispari.