

2^a Prova di verifica di Analisi Matematica I del 12 Gennaio 2004

Risposte

1. Sia $f(x) = \left| \frac{1 + \lg x}{x} \right|$. Determinare i massimi e minimi relativi e/o assoluti, l'insieme immagine di f , e calcolare l'area della regione di piano determinata dalla f in $[\frac{1}{3}, 1]$.

La funzione ha un massimo relativo in $(1, 1)$ e minimo assoluto in $(e^{-1}, 0)$.

Im $f = [0, +\infty[$.

Area $= 1 - \ln 3 + \frac{1}{2}(\ln 3)^2$.

2. Dopo aver enunciato il teorema di derivazione delle funzioni composte, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^{\arctan x}$ nel punto di coordinate $(1, f(1))$.

L'equazione della retta richiesta è $y = 1 + \frac{\pi}{4}(x - 1)$.

3. Sia $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-3}$. Dire se la funzione è invertibile e, in caso affermativo, calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_o = 3$.

La funzione è invertibile e $D(f^{-1}(3)) = -\frac{1}{16}$.

4. Sia f definita su $[0, 1]$, continua e derivabile in $]0, 1[$, e tale che $f(0) = f(1)$. Allora:

- a) esiste un punto $c \in]0, 1[$ tale che $f'(c) = 0$;
- b) ad f si può applicare il teorema di Lagrange in $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$;
- c) f è continua in $[0, 1]$;
- d) ad f si può applicare il teorema di Rolle in $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

La risposta corretta è la b).

5. Con quale metodo si può risolvere l'integrale $\int \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$?

L'integrale si può risolvere per sostituzione ponendo $x - 1 = t^{12}$.

6. Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$.

Il limite vale $\frac{11}{24}$.

7. Dire se la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty[$.

Si, la funzione è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty[$.

9. [*Facoltativo*] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione pari e derivabile. Provare che f' è dispari.

Poichè $f(x) = f(-x)$, derivando ambo i membri si ottiene $f'(x) = -f'(-x)$.